

# Introdução a Lógica Matemática

Vitor Amadeu Souza

[vitor@cerne-tec.com.br](mailto:vitor@cerne-tec.com.br)

[www.cerne-tec.com.br](http://www.cerne-tec.com.br)

## 1.1 Proposição

Uma proposição nada mais é algo que podemos dizer se é verdadeiro ou falso. Por exemplo, se perguntarmos “Hoje é Sábado?” teremos apenas duas respostas, sendo neste caso Sim ou Não. Sempre que tivermos uma pergunta em que haja apenas duas respostas, estaremos diante de uma proposição. Agora se perguntarmos “Que dia é Hoje?” não será uma proposição, pois teremos neste caso 7 respostas, podendo ir de segunda ao domingo. Vejamos abaixo alguns exemplos de proposição:

$9 <> 5$ ? Ou seja, 9 é diferente de 5? Neste caso temos apenas duas respostas, que neste caso é sim, ou seja, verdadeiro.

$10 > 20$ ? Neste caso a resposta é Não, pois 10 é menor que 20.

## 1.2 Negação

A negação é uma forma de invertermos o resultado da expressão, ou seja se o resultado for verdadeiro e negarmos o valor, teremos falso e vice-versa. Vejamos abaixo uma tabela que exprime isso:

Saída	~Saída
V	F
F	V

Sempre que queremos representar uma negação, usamos o sinal  $\sim$  para isso. Desta forma a negação de V ( $\sim V$ ) será F e a negação de F ( $\sim F$ ) será V.

## 1.3 Exercícios

1. Informe abaixo qual dos exemplos é uma proposição.

a) Vamos ao cinema?

R: É proposição, pois neste caso podemos ir ou não ao cinema.

b) Que dia é hoje?

R: Não é proposição pois temos neste caso 7 respostas.

c) Hoje é domingo?

R: É uma proposição, pois pode ter como resposta Sim ou Não.

d) É inverno?

R: Também é uma proposição pois podemos estar no inverno ou não.

2. Informe abaixo o resultado da operação.

a)  $\sim (1 > 0)$  ?

R: A resposta é falsa pois 1 é de fato maior que 0, sendo neste caso Verdadeiro. Porém note que o resultado da operação é negado através do operador  $\sim$  tendo assim como resultado a resposta falsa.

b)  $\sim (10 > 3)$  ?

R: Neste caso 10 não é maior que 3, tendo como resultado falso. Porém todo o conteúdo é negado e desta forma teremos um resultado Verdadeiro. Sendo assim o resultado é verdadeiro.

c)  $\sim (1 = 1)$  ?

R: A resposta será falsa, pois 1 é igual 1 ou seja verdadeiro porém logo em seguida todo o resultado é negado pelo operador  $\sim$  tendo assim o resultado falso.

d)  $\sim (1 < 3)$  ?

R: O resultado é falso pois 1 é menor que 3, tendo neste caso resultado verdadeiro porém logo em seguida todo o conteúdo é negado, tendo assim um resultado falso.

## 2.1 Proposição Composta – Conectivos

Podemos usar operadores conectivos para ligar mais de uma proposição. Por exemplo, digamos que tenhamos as seguintes proposições:

É sábado? Passa um bom Filme?

Poderíamos assim construir uma tabela verdade como a proposta abaixo:

É Sábado	Passa um Bom Filme	Vamos ao Cinema?
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Veja que conforme a tabela acima somente vamos ao cinema se for Sábado *e* Passar um bom filme. Neste exemplo estamos usando o operador *and* também chamado de *e*. Este operador é representado pelo símbolo  $\blacktriangle$ . Agora vejamos outro operador também muito usado, chamamos este de operador *ou*. A tabela verdade encontra-se abaixo:

Proposição 1	Proposição 2	Resultado
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Veja que conforme a tabela acima, o resultado será verdadeiro caso alguma das proposições seja verdadeira. Por exemplo, vamos imaginar as seguintes proposições:

É fim de semana ? Estou com dinheiro?

É fim de Semana?	Estou com dinheiro?	Vou viajar?
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Veja que no caso acima caso a pessoa esteja com dinheiro ou seja fim-de-semana a mesma irá viajar, representando assim o operador *ou*. Tal operador é representado pelo símbolo  $\vee$ .

## 2.2 Exercícios

1. Informe abaixo o resultado para as operações abaixo:

a)  $3 > 1$  e  $4 > 2$  ?

R: Temos verdadeiro para 3 maior que 1 assim como para 4 maior que 2, são duas proposições verdadeiras. Neste caso, seguindo a tabela verdade apresentada neste tópico, o resultado será verdadeiro também.

b)  $3 > 1$  e  $3 = 1$  ?

R: Temos 3 que realmente é maior que 1, sendo assim esta proposição é verdadeira. Agora o valor 3 não é igual 1, o que gera um resultado falso. Como vimos, uma proposição verdadeira com outra falsa gera como resultado falso.

c)  $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$  ou  $5 > 2$

R: O valor  $\frac{1}{2}$  não é menor que  $\frac{3}{4}$  sendo assim esta proposição é falsa. Agora 5 é maior que 2, sendo assim o resultado é verdadeiro. Conforme apresentado na tabela deste tópico para o operador *ou*, quando temos um resultado verdadeiro e outro falso o resultado será verdadeiro.

d) Faz frio? É fim-de-semana?

Esta é uma pergunta onde a pessoa vai a serra de Petrópolis por exemplo se for final de semana e fizer frio. Sendo assim podemos construir a seguinte tabela verdade:

Faz Frio?	É fim-de-semana?	Vamos a serra?
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Neste caso somente se ambas as proposições forem verdadeiras é que a pessoa irá a serra.

### 3.1 Condicionais

Através das proposições podemos construir novas proposições usando para isso os seguintes operadores:

Se ... então ... onde é usado o símbolo  $\rightarrow$

Se e somente se ... onde é usado o símbolo  $\leftrightarrow$

O condicional  $p \rightarrow q$  é falso apenas quando  $p$  for verdadeiro e  $q$  for falso. Desta forma, podemos montar a seguinte tabela verdade:

P	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Temos então os seguintes exemplos:

1.  $p$  é V e  $q$  é V, então  $p \rightarrow q$  é V
2.  $p$  é V e  $q$  é F, então  $p \rightarrow q$  é F
3.  $p$  é F e  $q$  é V, então  $p \rightarrow q$  é V
4.  $p$  é F e  $q$  é F, então  $p \rightarrow q$  é V

Já em relação ao condicional  $\leftrightarrow$  é verdadeiro apenas quando  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras ou falsas, como por exemplo apresentado na tabela verdade abaixo:

P	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Temos então os seguintes exemplos:

1.  $p$  é V e  $q$  é V, então  $p \leftrightarrow q$  é V
2.  $p$  é V e  $q$  é F, então  $p \leftrightarrow q$  é F
3.  $p$  é F e  $q$  é V, então  $p \leftrightarrow q$  é F
4.  $p$  é F e  $q$  é F, então  $p \leftrightarrow q$  é V

### 3.2 Exercícios

1. Classifique as proposições abaixo como verdadeiro ou falso:

a)  $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 * 4$

R: A primeira proposição é verdadeira assim como a segunda, sendo assim conforme foi exposto na tabela verdade para este operador tal resultado é verdadeiro.

b)  $5 + 7 * 1 = 10 \rightarrow 3 * 3 = 9$

R: A primeira proposição é falsa porém a segunda é verdadeira, sendo assim conforme foi exposto na tabela verdade para este operador tal resultado é verdadeiro.

c)  $6 <= 2 \leftrightarrow 6 - 2 >= 0$

R: A primeira proposição é falsa porém a segunda é verdadeira, sendo assim de acordo com o enunciado na tabela verdade este resultado é falso.

c)  $1 <> 0 \leftrightarrow 1 = 1$

R: A primeira proposição é verdadeira assim como a segunda, sendo assim o resultado é verdadeiro de acordo com enunciado na tabela verdade.

### 4.1 Tautologias

Nada mais é do que o resultado que pode ser proveniente dos diversos operadores apresentados até agora e é chamado de proposição logicamente verdadeira ou tautologia tal resultado que seja Verdadeiro. Vejamos um exemplo que usa a função  $p \vee q \vee \sim q$  através da tabela abaixo que mostra um exemplo de tautologia:

P	Q	$\sim Q$	$p \vee q \vee \sim q$
F	F	V	V
F	V	F	V
V	F	V	V
V	V	F	V

### 4.2 Proposições Logicamente Falsas

São chamadas assim o resultado proveniente de todos os operadores estudados até agora onde o resultado seja FALSO. Vejamos abaixo um exemplo que mostra o uso de tal recurso através da função  $p \wedge q \wedge \sim q$ :

P	Q	$\sim Q$	$p \wedge q \wedge \sim q$
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	V	F
V	V	F	F

### 4.3 Relação de Implicação

Dadas as proposições p e q podemos falar p implica em q quando na tabela verdade não ocorre para p Verdadeiro e para q Falso em nenhuma linha. Vejamos alguns exemplos abaixo afim de elucidar o assunto:

1.  $2 \mid 4 \Rightarrow 2 \mid 4 * 5$

Onde neste caso informa que como 2 é divisor de 4, também é divisor de  $4 * 5$  ou seja 20.