Vitor Amadeu Souza

vitor@cerne-tec.com.br

Introdução a Transformada de Laplace

1. Introdução

Este artigo visa apresentar um conteúdo prático demonstrando a funcionalidade da transformada de Laplace.

2. Quem foi Laplace?

Antes de mais nada, vamos conhecer quem foi Pierre Simon, ou Marques de Laplace através desta seção do trabalho. Ele foi um matemático e físico francês que organizou a astronomia matemática, sumarizando e ampliando o trabalho de seu predecessores nos cinco volumes do seu *Mécanique Céleste* (Mecânica celeste) (1799-1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física.

Ele também formulou a equação de Laplace. A transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática — campo em que teve um papel principal na formação. O operador diferencial de Laplace, da qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome.

Ele se tornou conde do Império em 1806 e foi nomeado marquês em 1817, depois da restauração dos Bourbons.

3. O que é Transformada de Laplace?

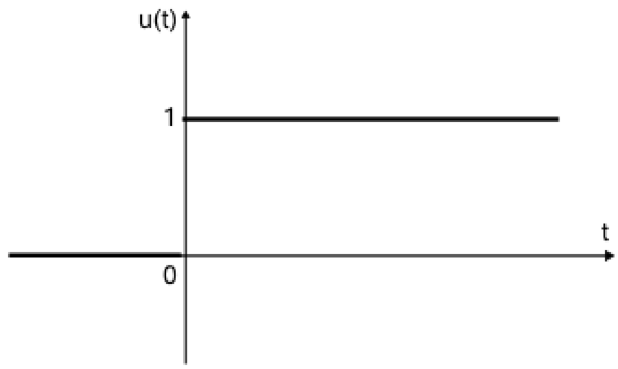
É definida por uma função $f(t)$ definida para todo número real $t \geq 0$ é a função $F(s)$, definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

As propriedades desta transformada tornam-na útil para a análise de sistemas dinâmicos lineares. A vantagem mais interessante desta transformada é que a integração e a derivação tornam-se multiplicações e divisões, da mesma maneira que o logaritmo transforma a multiplicação em adição. Ela permite levar a resolução de equações diferenciais à resolução de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver.

4. Função Degrau Unitário

Observe a figura abaixo:



Podemos defini-la da seguinte forma:

$$u(t) = 1 \text{ para } t \geq 0$$
$$u(t) = 0 \text{ para } t < 0$$

$$L\{ u(t) \} = \int_{0...\infty} e^{-s\,t}\, 1\, dt = (-1/s)\; e^{-s\,t} \big|_{0...\infty} = 1 / s$$

Desta forma, podemos representar uma função degrau usando a transformada de Laplace por 1/s. Na tabela abaixo está apresentado algumas transformadas de Laplace para algumas funções usuais:

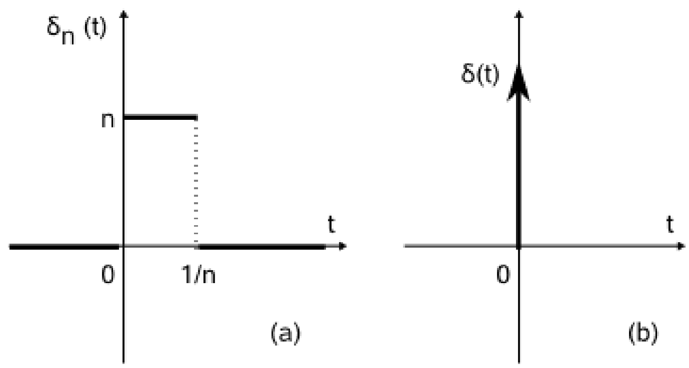
$f(t)$	$L\{ f(t) \}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^n}{n!} e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \text{ sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

5. **Função Delta ou Função Impulso**

Digamos que uma função seja definida da seguinte forma:

δ_n (t) = n para $0 \leq t < 1/n$
δ_n (t) = 0 caso contrário

Graficamente esta função seria representada da seguinte forma:



Para qualquer n, pode ser facilmente deduzido que $\int_{-\infty \ldots +\infty} \delta_n(t) = n\,(1/n) = 1$.

A função delta (ou função impulso) é dada pelo limite de δ_n (t) quando n tende para infinito:

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(t)\ .$$

Podemos deduzir que:

$$\delta(t) = \infty \text{ para } t = 0$$
$$\delta(t) = 0 \text{ para } t \neq 0$$

6. **Convergência e Divergência**

Para sabermos se uma função diverge ou converge, devemos verificar se o resultado da mesma tende a infinito. Caso o resultado seja infinito, as funções divergem e caso contrário as mesmas convergem. Vejamos alguns exemplos afim de facilitar o assunto:

a) $\int_1^\infty (1/t)dt$

Seja $f(t) = 1/t$, $t \geq 1$, então $\int_1^\infty (1/t)dt$ converge?

$$\int_1^{\infty} f(t)dt = \int_1^{\infty} (1/t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} (1/t)dt = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$$

Logo esta integral diverge.

b) Seja f(t) = 1 / t ^{2}, t ≥ 2, então a integral $\int_2^{\infty} f(t)dt \qquad diverge?$

$$\int_2^{\infty} (1/t^2)dt = \lim_{A\to\infty} \int_2^{A} (1/t^2)dt = \lim_{A\to\infty} (-1/t\Big|_2^A) = 1/2$$

Logo podemos ver que esta integral converge para ½.