Vitor Amadeu Souza

vitor@cerne-tec.com.br

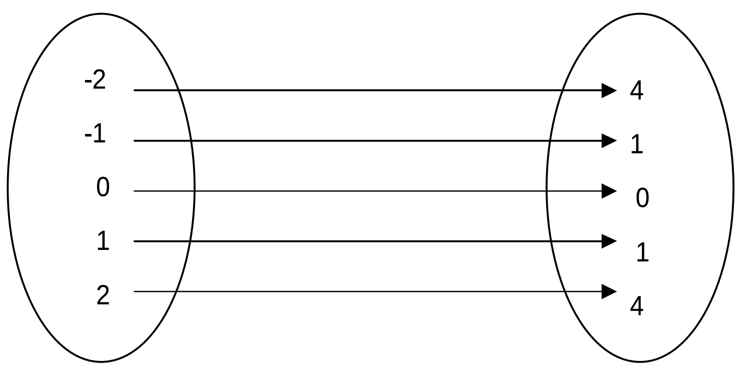
Funções

Definições, Domínio e Imagem

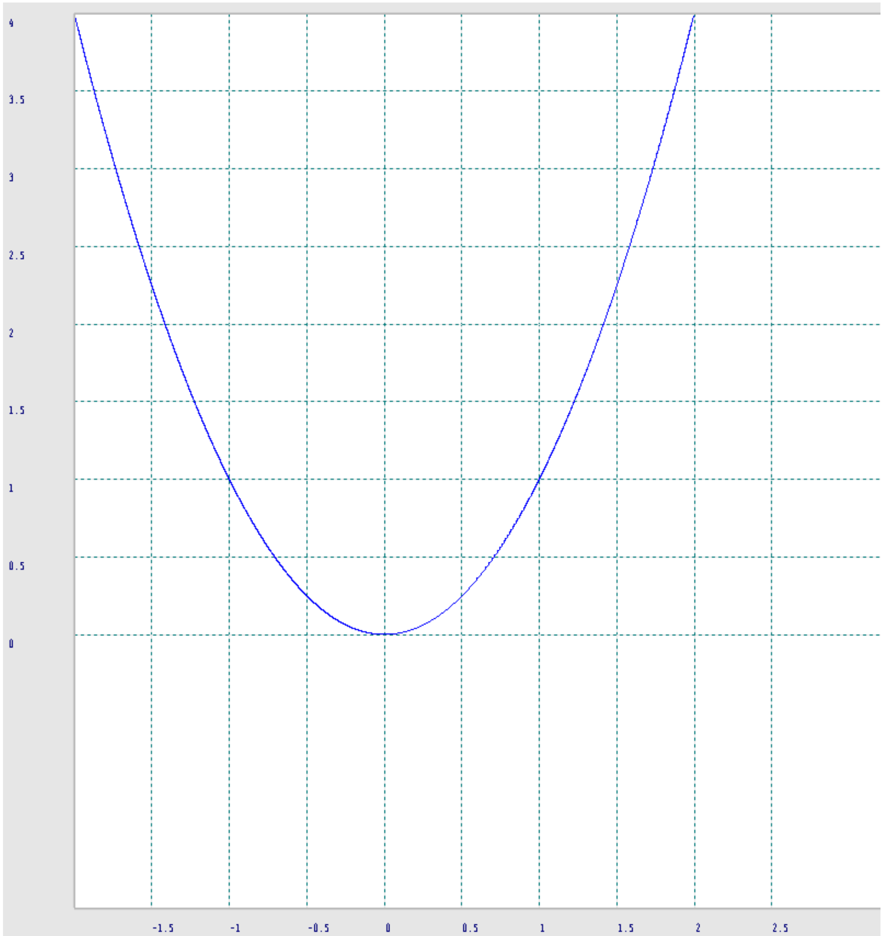
Definimos função como a relação entre dois ou mais conjuntos, estabelecida por uma lei de formação, isto é, uma regra geral. Os elementos de um grupo devem ser relacionados com os elementos do outro grupo, através dessa lei. Por exemplo, vamos considerar o conjunto A formado pelos seguintes elementos {–2, –1, 0, 1, 2}, que irão possuir representação no conjunto B de acordo com a seguinte lei de formação $y = x^2$.

A	Lei de Formação	B
-2	$Y = (-2)^2 = 4$	4
-1	$Y = (-1)^2 = 1$	1
0	$Y = (0)^2 = 0$	0
1	$Y = (1)^2 = 1$	1
2	$Y = (2)^2 = 4$	4

Aplicada a lei de formação, temos os seguintes pares ordenados: {(–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1,1), (2, 4)}. Essa relação também pode ser representada com a utilização de diagramas de flechas, relacionando cada elemento do conjunto A com os elementos do conjunto B. Observe:



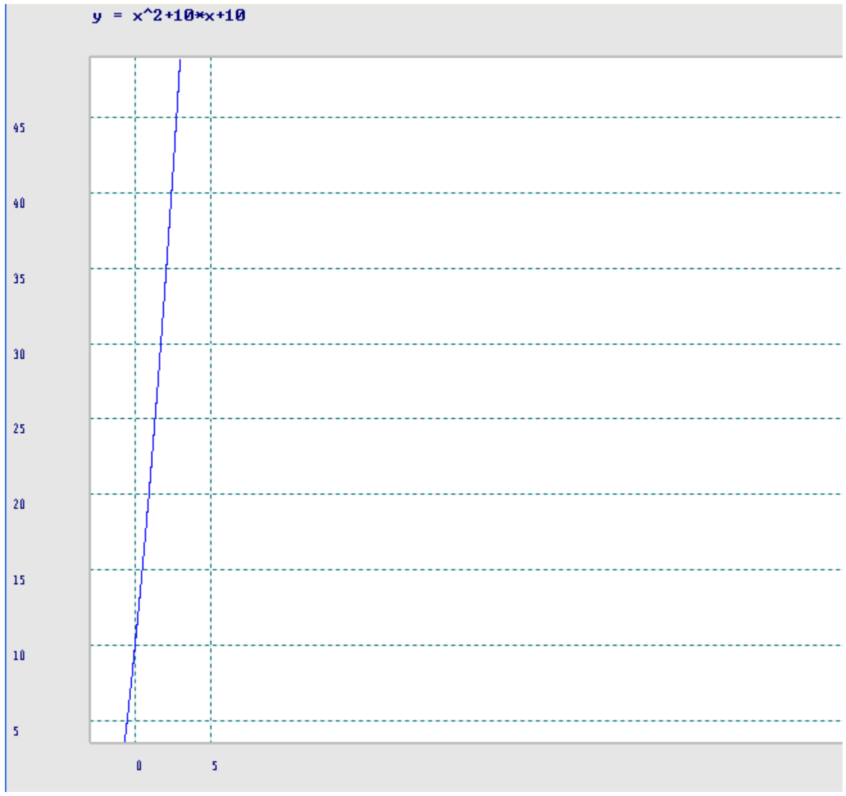
Podemos também representar o diagrama acima, através de um gráfico como apresentado a seguir:



Vejamos agora outro exemplo, porém com base nos valores de A iguais a {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} e a função dada será f(x)= $x^2 + 10x + 2$:

X	**Y**
-3	-19
-2	-14
-1	-7
0	2
1	13
2	26
3	41

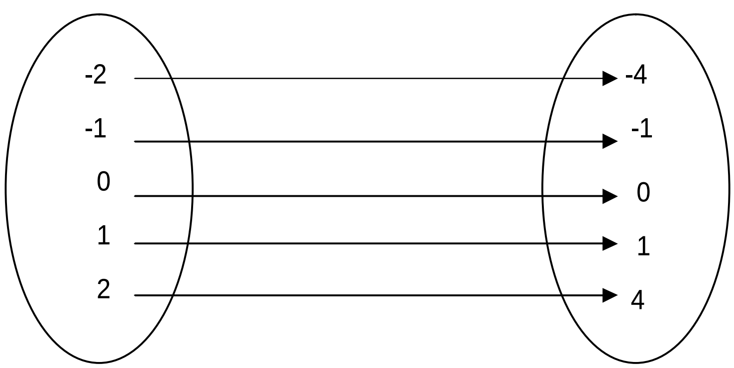
Abaixo temos o gráficos desta função:



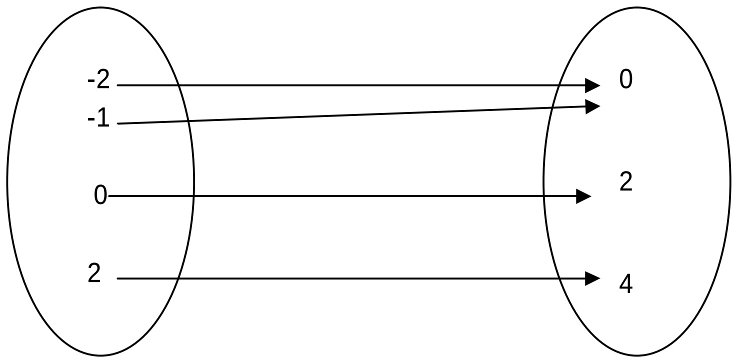
Nestes dois exemplos além de ver como os elementos de Y são funções dos valores provenientes de X através da função dada, podemos ver também que todos os elementos do conjunto X são chamados domínio da função e os elementos de Y são chamados de imagem da função.

Função Injetora

Dizemos que uma função é injetora quando dois elementos distintos do conjunto A estão relacionados com dois elementos distintos de B. Observe o exemplo abaixo:

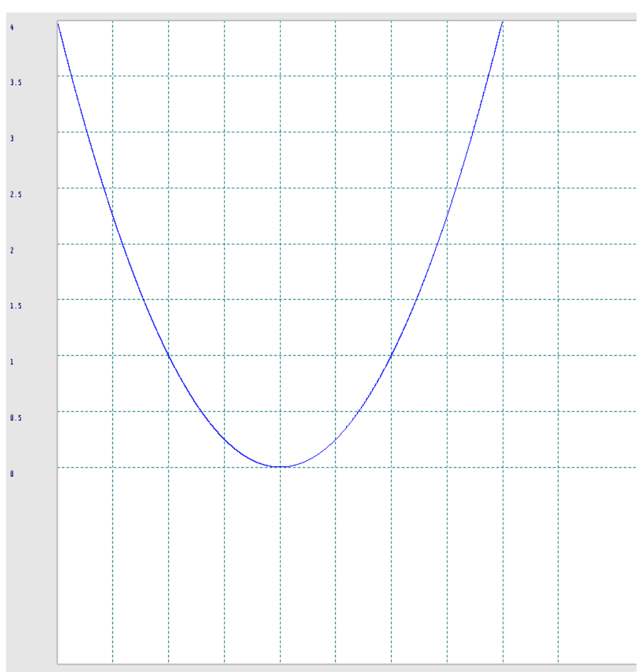


Já o diagrama abaixo não representa uma função injetora:



Por exemplo, será que a função $f(x) = x^2$ é injetora? Vamos observar a tabela e gráfico abaixo:

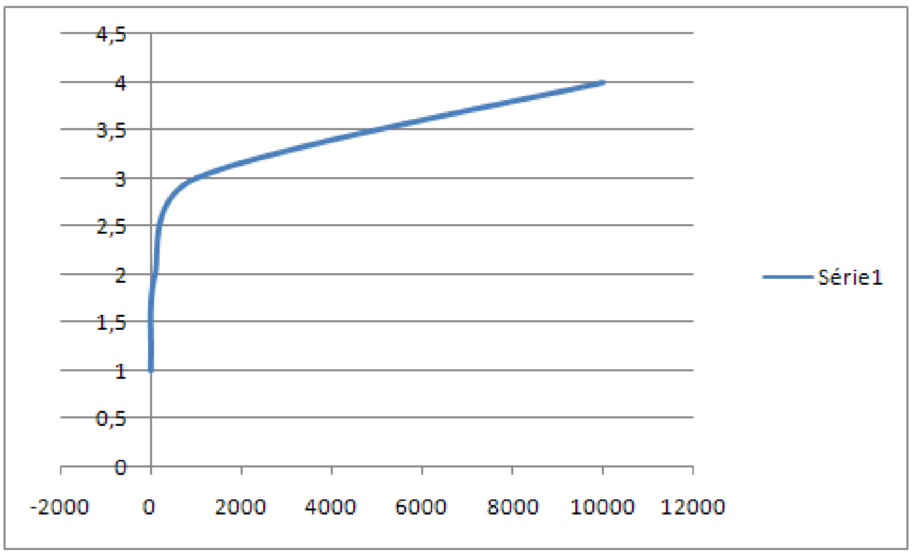
X	**Y**
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Podemos ver claramente que tal função não é injetora, pois por exemplo para X=-3 temos Y=9 e para X=3 temos também Y=9.

Agora será que a função f(x) = log x é injetora? Vamos ver o gráfico abaixo:

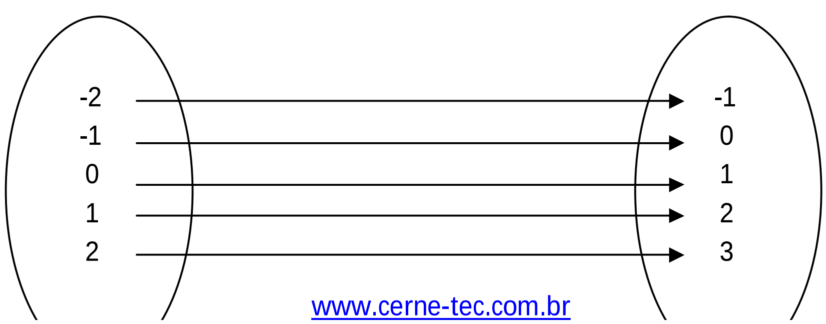
X	Y
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4



Neste caso podemos observar que para cada valor de X temos um Y diferente e neste caso a função é injetora.

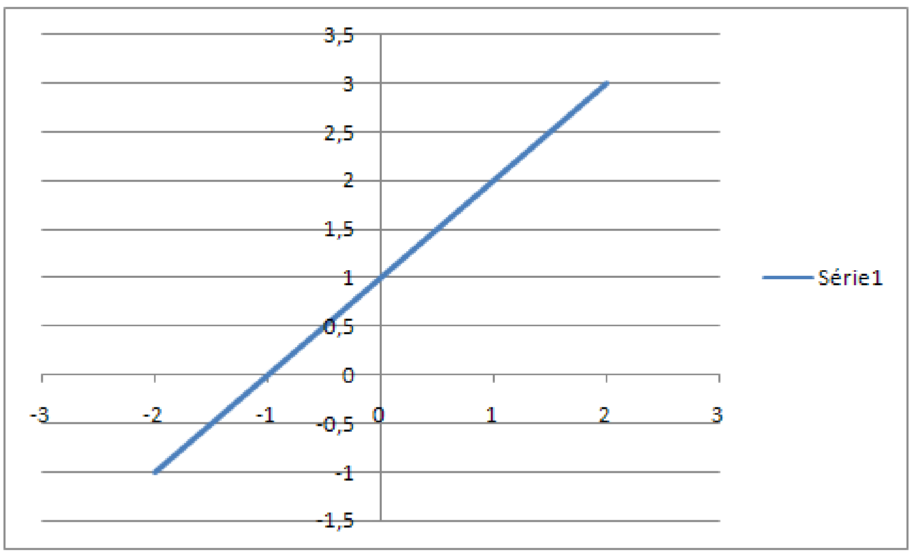
Função Sobrejetora

Dizemos que uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem é especificadamente igual ao contradomínio, Im = B. Por exemplo, se temos uma função f : Z→Z definida por y = x +1 ela é é sobrejetora, pois Im = Z. Vejamos abaixo o diagrama representativo:



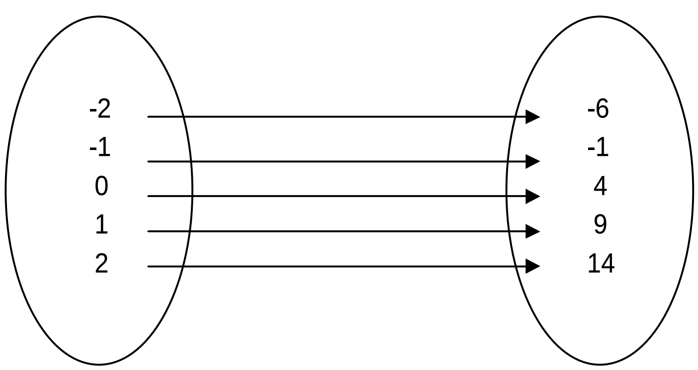
Podemos verificar abaixo a tabela e a plotagem de tal gráfico:

X	Y
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3



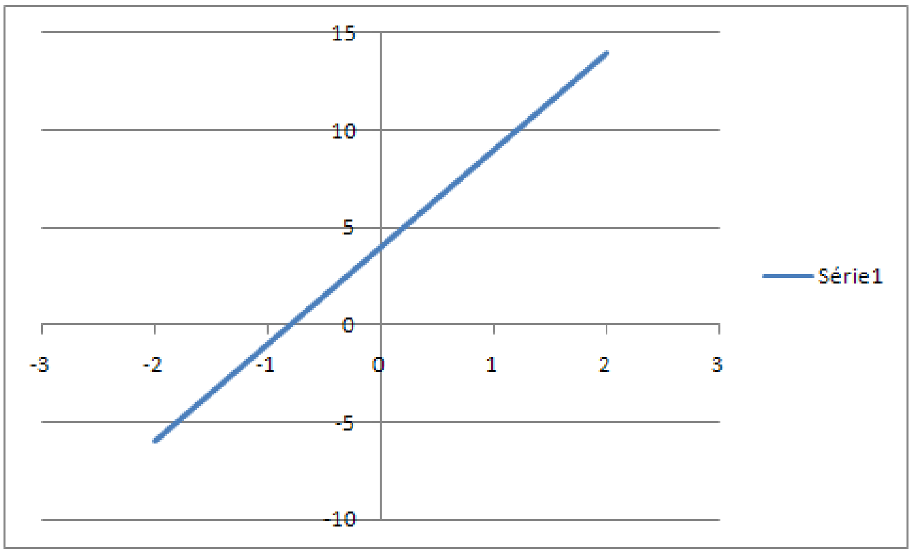
Função Bijetora

A função bijetora é toda aquela que é injetora e sobrejetora. Por exemplo, a função f(x)=5x + 4 é injetora pois para cada x implica um f(x) diferente e é sobrejetora pois para cada elemento em f(x) existe pelo menos um em X tal que f(x) = y. Vejamos abaixo um diagrama representativo:



Agora vejamos uma tabela juntamente com o seu gráfico:

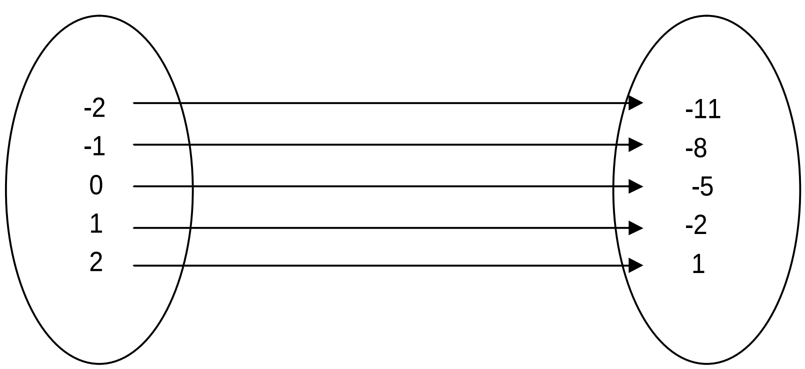
X	Y
-2	-6
-1	-1
0	4
1	9
2	14



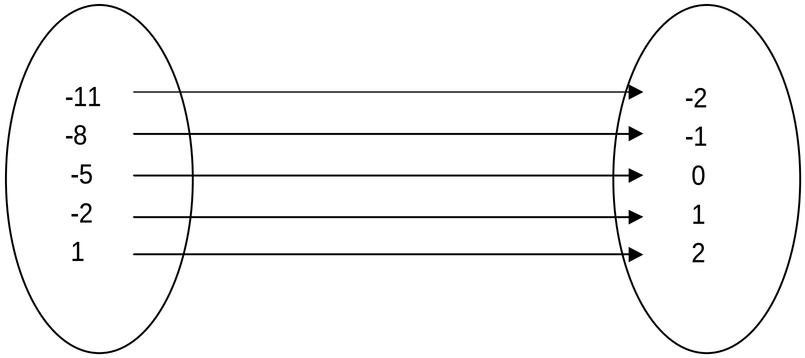
Função Inversa

Uma função será inversa se ela for bijetora. Se f : A→B é considerada bijetora então ela admite inversa f : B→A. Desta forma podemos concluir que toda função bijetora é inversa. Por exemplo, a função y = 3x-5 possui inversa y = (x+5)/3. Observe os dois diagramas abaixo:

Y= 3x – 5

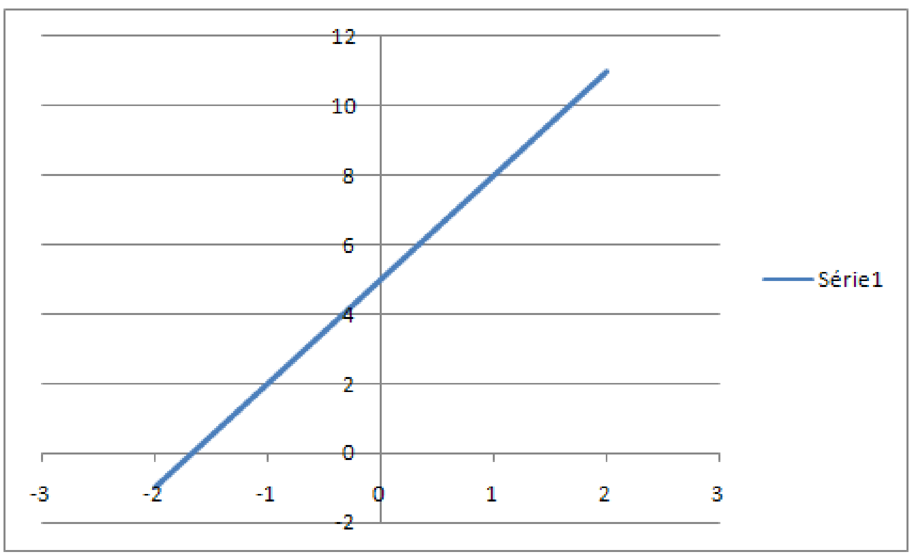


Y= (x + 5)/3



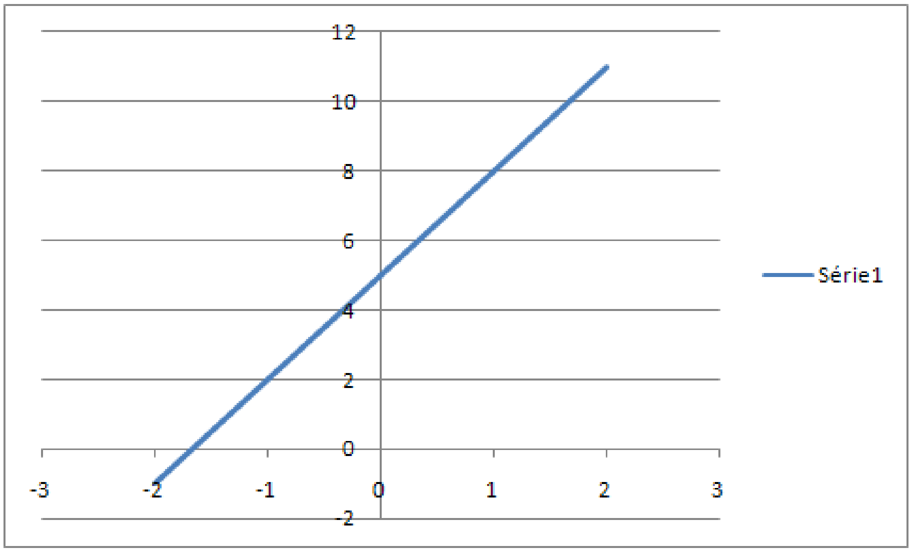
Vejamos as tabelas e gráficos destas duas funções:

X	Y
-2	-9
-1	-7
0	-5
1	-3
2	-1



Agora da função y= (x+5)/3:

X	Y
-11	-2
-8	-1
-5	0
-2	1
1	2



Continuidade

Dizemos que uma função f(x) é contínua num ponto q do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

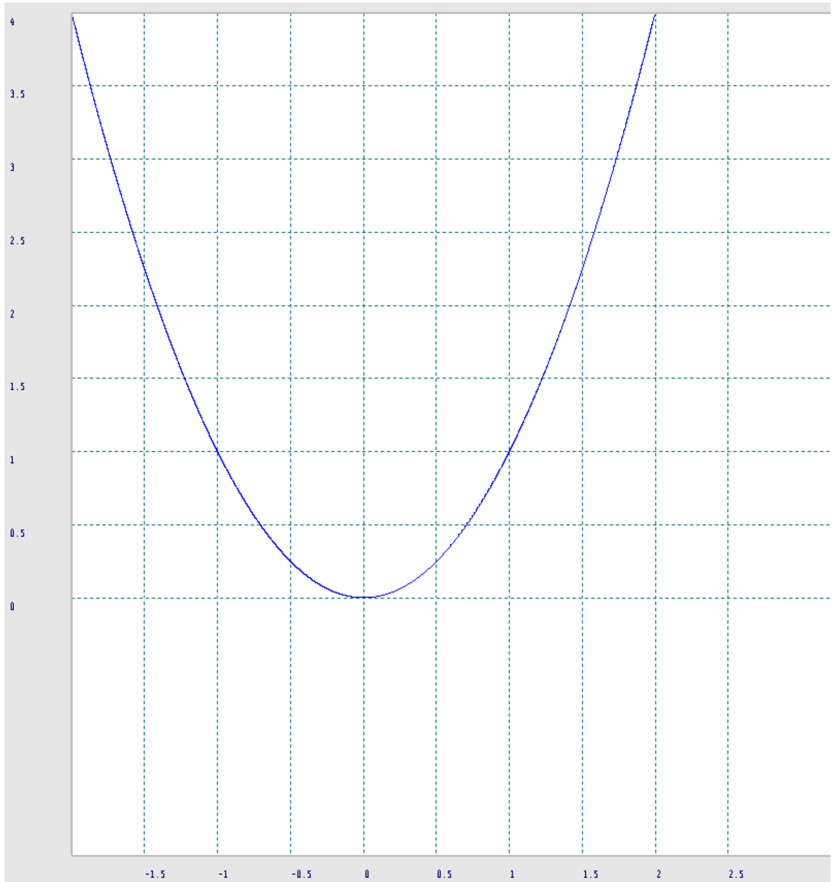
i) f(a)
ii) $\lim_{x\to a} f(x)$
iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Vejamos alguns exemplos abaixo para facilitar a compreensão.

1) Verifique se $f(x)=x^2$ é contínua no ponto 2.

i) $f(2)=2^2 = 4$
ii) $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$
iii) Neste caso temos f(x) = f(2), logo a função f(x) é contínua no ponto 2.

O gráfico de nossa função ficaria igual a da figura abaixo:

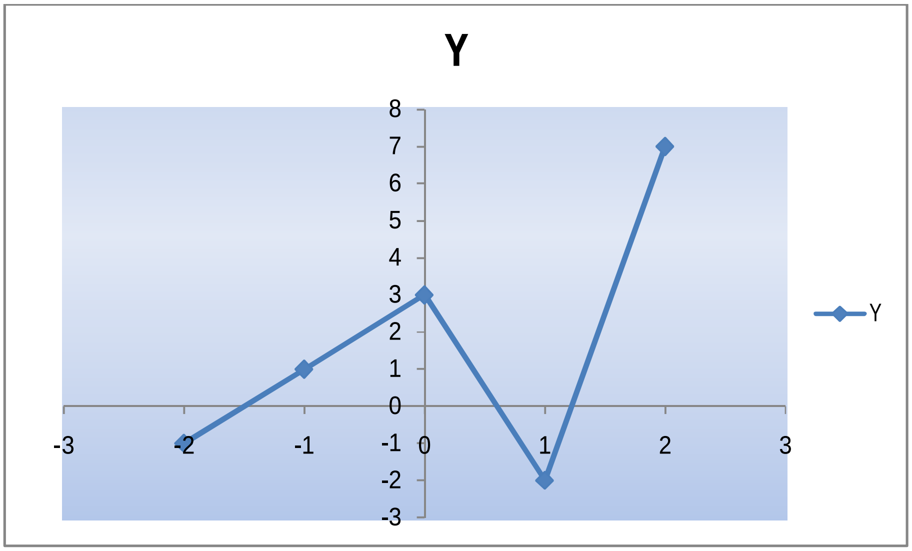


2) Verifique se a função definida abaixo é contínua no ponto 1, a função é dada como:

$$f(x) = (2x + 3)(x-1)/(x-1) \quad \text{se} \quad x <> 1$$
$$f(x) = -2 \text{ se } x = 1$$

i) $f(1) = -2$
ii) $\lim_{x\to1} (2x + 3)(x-1)/(x-1) = 5$
iii) Como f(x) é diferente de f(1), esta função não é contínua no ponto 1.

Vejamos o gráfico desta função abaixo. Note que no ponto x=1 podemos observar a descontinuidade desta função.


Y
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
Y